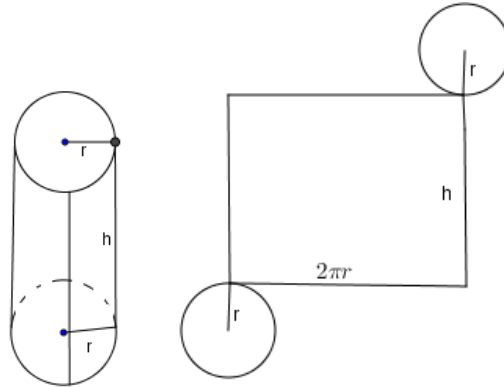


Opción A

Ejercicio 1 opción A, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

[2'5 puntos] Se necesita construir un depósito cilíndrico, con tapas inferior y superior, con capacidad de 20π m³. El material para las tapas cuesta 10 euros cada m² y el material para el resto del cilindro 8 euros cada m². Calcula, si existe, el radio de las tapas y la altura del cilindro que hace que el coste total sea mínimo.

Solución



El material para las tapas cuesta 10 euros cada m² y el material para el resto del cilindro 8 euros cada m². Área circula: πr^2 ; longitud circunferencia = $2\pi r$.

Función a maximizar: Coste = $C = (2\pi r) \cdot (h) \cdot (8 \text{ €}) + 2 \cdot (\pi r^2) \cdot (10 \text{ €}) = 16\pi r \cdot h + 20\pi r^2$

Relación entre las variables Volumen = $V = (\text{área base}) \cdot \text{altura} = (\pi r^2) \cdot h = 20\pi$, de donde $h = \frac{20\pi}{\pi r^2} = \frac{20}{r^2}$.

Función a maximizar: $C(r) = 16\pi r \cdot h + 20\pi r^2 = 16\pi r \cdot \left(\frac{20}{r^2}\right) + 20\pi r^2 = \left(\frac{320\pi}{r}\right) + 20\pi r^2$

Si $C'(b) = 0$ y $C''(b) > 0$, $x = b$ es un mínimo de $C(r)$

$C'(r) = \left(\frac{-320\pi}{r^2}\right) + 40\pi r$. De $C'(r) = 0$, tenemos $40\pi r = \frac{320\pi}{r^2}$, es decir $r^3 = 8$, de donde $r = \sqrt[3]{8} = 2$ m.

La altura del depósito es: $h = \frac{20}{2^2} = 5$ m.

Veamos que $r = 2$ es un mínimo, viendo que $C''(2) > 0$

$C'(r) = \left(\frac{-320\pi}{r^2}\right) + 40\pi r = -320\pi r^{-2} + 40\pi r$.

$V'(r) = -2 \cdot (-320\pi r^{-2-1}) + 40\pi = 640\pi r^{-3} + 40\pi = \left(\frac{640\pi}{r^3}\right) + 40\pi$.

Sustituyendo "2" por "r" en $C''(r)$ obtenemos $C''(2) = \left(\frac{640\pi}{8}\right) + 40\pi = 80\pi + 40\pi = 120\pi > 0$, luego es un mínimo.

Las dimensiones pedidas son radio = $r = 2$ m, y altura = $h = 5$ m.

Ejercicio 2 opción A, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

Sea $I = \int_0^8 \frac{1}{2 + \sqrt{x+1}} dx$.

a) [1'25 puntos] Expresa I aplicando el cambio de variable $t = 2 + \sqrt{x+1}$.

b) [1'25 puntos] Calcula el valor de I .

Solución

(a) y (b)

Cambio $t = 2 + \sqrt{x+1}$, de donde $t - 2 = \sqrt{x+1}$, es decir $(t - 2)^2 = x + 1$.

Diferenciando tenemos: $dx = 2(t - 2) \cdot dt$

Si $x = 0$ tenemos $t = 2 + \sqrt{0+1} = 3$.

Si $x = 8$ tenemos $t = 2 + \sqrt{8+1} = 5$.

La integral es $I = \int_0^8 \frac{1}{2 + \sqrt{x+1}} dx = \int_3^5 \frac{2(t-2)}{t} dt = \int_3^5 \frac{2t-4}{t} dt = \int_3^5 \left(\text{Cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}} \right) dt$.

Vemos que es una integral racional, calcularemos primero la división entera:

$2t - 4$	t (divisor)
$-2t$	2 (cociente)
-4 (Resto)	

(b)

$$= \int_3^5 \frac{2t - 4}{t} dt = \int_3^5 \left(\text{Cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}} \right) dt = \int_3^5 \left(2 + \frac{-4}{t} \right) dt = [2t - 4\ln|t|]_3^5 = (10 - 4 \cdot \ln(5)) - (6 - 4 \cdot \ln(3)) =$$

$$= 4 - 4 \cdot \ln(5) + 4 \cdot \ln(3) = 4 + 4 \cdot \ln(3) - 4 \cdot \ln(5) = 4 + 4 \cdot (\ln(3) - \ln(5)) = 4 + 4 \cdot \ln(3/5) \cong 1.9567$$

Ejercicio 3 opción A, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [0'5 puntos] Comprueba que $AA^t - 2A = I$ (A^t denota la traspuesta de A e I la matriz identidad).
b) [0'75 puntos] Calcula A^{-1} .
c) [1'25 puntos] Determina, si existe, la matriz X que verifica $AX + I = 3A$.

Solución

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a)
Comprueba que $AA^t - 2A = I$ (A^t denota la traspuesta de A e I la matriz identidad).

$$A \cdot A^t - 2A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

- b)
Calcula A^{-1} .

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (1) = -1 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t)$.

$$|A| = -1; A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \text{luego } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- c)
Determina, si existe, la matriz X que verifica $AX + I = 3A$.

De $AX + I = 3A$, tenemos $AX = 3A - I$. Multiplicando por la izquierda, la expresión anterior, por A^{-1} , tenemos:

$$A \cdot A^{-1} \cdot X = A^{-1} \cdot (3A - I) \rightarrow I \cdot X = 3A^{-1} \cdot A - A^{-1} \cdot I \rightarrow X = 3I - A^{-1}.$$

$$\text{Luego } X = 3I - A^{-1} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 opción A, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

Considera los puntos $A(-1, -2, -1)$ y $B(1, 0, 1)$.

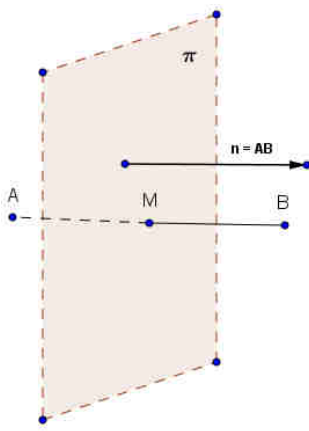
- a) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.
b) [1'25 puntos] Calcula la distancia de $P(-1, 0, 1)$ a la recta que pasa por los puntos A y B .

Solución

Considera los puntos $A(-1, -2, -1)$ y $B(1, 0, 1)$.

- a)
Determina la ecuación del plano π respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

El plano π que nos piden pasa por el punto medio del segmento AB y tiene vector normal el \overline{AB} , es decir nos piden el plano mediador del segmento AB .



$A(-1,-2,-1)$ y $B(1,0,1)$.

$\mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (2,2,2)$. Otro vector normal sería $\mathbf{n} = (1,1,1)$.

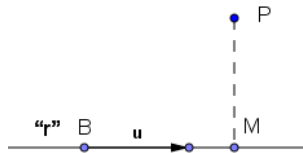
El punto medio del segmento AB es $M\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{-2+0}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = M(0,-1,0)$.

Un plano paralelo a π es $x + y + z + K = 0$, como $M \in \pi \rightarrow 0 - 1 + 0 + K = 0$, de donde $K = 1$ y el plano pedido es $\pi \equiv x + y + z + 1 = 0$.

b)

Calcula la distancia de $P(-1,0,1)$ a la recta que pasa por los puntos A y B.

Sabemos que la distancia del punto P a recta r, determinada por A y B [Tomamos como punto el $B(1,0,1)$ y como vector director el $\mathbf{u} = (1,1,1)$], es la mínima distancia del punto P a la recta, es decir $d(P,M) = \|\mathbf{PM}\|$, siendo M la proyección ortogonal de P sobre r



Tomamos punto genérico M de la recta (en vectorial), formamos el vector \mathbf{PM} y le imponemos la condición de perpendicularidad a dos vectores, uno el \mathbf{PM} y otro el director \mathbf{u} de la recta "r".

La recta "r" en la forma vectorial (punto $B(1,0,1)$ y vector $\mathbf{u} = (1,1,1)$) es "r" $\equiv (1+\lambda, \lambda, 1+\lambda)$

Tomamos un punto genérico de la recta $M(1+\lambda, \lambda, 1+\lambda)$, formamos el vector $\mathbf{PM} = (1+\lambda-(-1), \lambda-0, 1+\lambda-1) = (2+\lambda, \lambda, \lambda)$ y le imponemos la condición de que sea perpendicular a la recta "r", es decir a su vector de dirección $\mathbf{u} = (1,1,1)$, por tanto su producto escalar (\bullet) tiene que ser cero.

$\mathbf{PM} \bullet \mathbf{u} = 0 \rightarrow (2+\lambda, \lambda, \lambda) \bullet (1,1,1) = 0 = 3\lambda + 2 = 0$, de donde $\lambda = -2/3$ y el vector \mathbf{PM} es:

$\mathbf{PM} = (2+(-2/3), (-2/3), (-2/3)) = (4/3, -2/3, -2/3)$, luego $d(P;r) = d(P;M) = \|\mathbf{PM}\| = \sqrt{(4/3)^2 + (-2/3)^2 + (-2/3)^2} = \sqrt{8/3} = \sqrt{8/3} \mathbf{u}^1$.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

[2'5 puntos] Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcula a, b, c y d sabiendo que f tiene un extremo relativo en $(0,1)$ y su gráfica un punto de inflexión en $(1,-1)$.

Solución

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcula a, b, c y d sabiendo que f tiene un extremo relativo en $(0,1)$ y su gráfica un punto de inflexión en $(1,-1)$.

Sabemos que las funciones polinómicas, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, son continuas y derivables las veces que sean necesarias, en \mathbb{R} .

Como tiene un extremo relativo en el punto $(0,1)$, sabemos que $f'(0) = 0$.

Como pasa por él punto $(0,1)$ tenemos que $f(0) = 1$.

Como tiene un punto de inflexión en el punto $(1,-1)$, sabemos que $f''(1) = 0$.

Como pasa por el punto (1,-1) tenemos que $f(1) = -1$.

Tenemos $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$.

De $f'(0) = 0$, tenemos $f'(0) = 0 + 0 + c = 0$, por tanto $c = 0$.

De $f''(1) = 0$, tenemos $f''(1) = 6a(1) + 2b = 0$, por tanto $3a + b = 0 \rightarrow b = -3a$.

De $f(0) = 1$, tenemos $f(0) = 0 + 0 + 0 + d = 1$, de donde $d = 1$.

De $f(1) = -1$, tenemos $f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + 0 + 1 = -1$, por tanto $a + b = -2$.

De $a + b = -2 = a - 3a = -2a$, tenemos $a = 1$, con lo cual $b = -3(1) = -3$

Los números encontrados son $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$ y $d = 1$.

La función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Ejercicio 2 opción B, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

Considera la región limitada por la gráfica de la función dada por $f(x) = \sqrt{2x - 2}$ para $x \geq 1$, la recta $y = x - 5$ y el eje de abscisas.

a) [0'75 puntos] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte entre la gráfica de f y las rectas.

b) [0'75 puntos] Expresa mediante integrales el área del recinto anterior.

c) [1 punto] Calcula el área.

Solución

Considera la región limitada por la gráfica de la función dada por $f(x) = \sqrt{2x - 2}$ para $x \geq 1$, la recta $y = x - 5$ y el eje de abscisas.

a)
Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte entre la gráfica de f y las rectas.

Con dos puntos, podemos dibujar una recta.

El eje de abscisa tiene de ecuación $y = 0$, resolvemos la ecuación $0 = x - 5$, de donde $x = 5$; es decir la recta $y = x - 5$ y el eje de abscisa se cortan en el punto (5,0).

La gráfica de $f(x) = \sqrt{2x - 2}$ es parecida a la de \sqrt{x} (también es una parábola, pero horizontal en este caso).

Vemos que $f(1) = \sqrt{2 - 2} = 0$, $f(3) = \sqrt{4} = 2$, etc..

Veamos el corte de $f(x) = \sqrt{2x - 2}$ con la recta $y = x - 5$.

De $\sqrt{2x - 2} = x - 5 \rightarrow 2x - 2 = (x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25 \rightarrow 0 = x^2 - 12x + 27 \rightarrow$

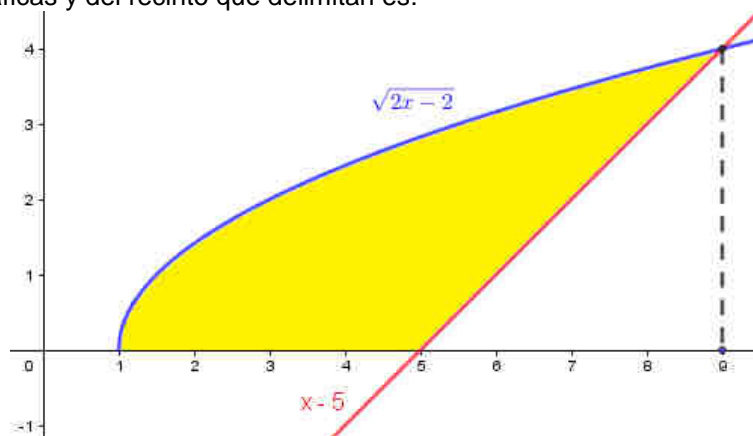
$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2}$, de donde $x = 3$ y $x = 9$.

Comprobamos las soluciones:

Para $x = 3 \rightarrow \sqrt{2(3) - 2} = 3 - 5 \rightarrow 2 = -2$, lo cual es falso, $x = 3$ NO VALE.

Para $x = 9 \rightarrow \sqrt{2(9) - 2} = 9 - 5 \rightarrow 4 = 4$, lo cual es cierto, $x = 9$ SI VALE.

Un esbozo de sus gráficas y del recinto que delimitan es:



b) Expresa mediante integrales el área del recinto anterior.

$$\text{Área} = \int_1^9 \sqrt{2x-2} dx - \int_5^9 (x-5) dx$$

c) Calcula el área.

Calculamos cada integral por separado:

La primera integral es por cambio, $2x - 2 = t^2$.

$$I_1 = \int_1^9 \sqrt{2x-2} dx = \begin{cases} 2x-2 = t^2; \text{ si } x=1, t=0 \\ 2dx = 2tdt; \text{ si } x=9, t=4 \\ dx = t \cdot dt \end{cases} = \int_0^4 t \cdot dt = \int_0^4 (t^2) dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^4 = \frac{4^3}{3} - 0 = \frac{64}{3}$$

$$I_2 = \int_5^9 (x-5) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 5x \right]_5^9 = \left(\frac{9^2}{2} - 5(9) \right) - \left(\frac{5^2}{2} - 5(5) \right) = 8$$

El área pedida es $I_1 - I_2 = \left(\frac{64}{3} - 8\right) u^2 = \frac{40}{3} u^2 \cong 13'333333 u^2$

Ejercicio 3 opción B, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

Sea A una matriz 3x3 tal que $\det(2A) = 8$.

a) [0'5 puntos] ¿Cuánto vale $\det(A)$?

b) [0'75 puntos] Siendo B la matriz que se obtiene de A multiplicando por 3 la primera fila y por -1 la tercera, ¿cuánto vale $\det(B)$?

c) [1'25 puntos] Determina los valores de x para los que la siguiente matriz A verifica que $\det(2A) = 8$,

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Sea A una matriz 3x3 tal que $\det(2A) = 8$.

a) ¿Cuánto vale $\det(A)$?

Sabemos que si A y B son cuadradas entonces, $\det(A) = |A|$, $|AB| = |A||B|$, $|A^{-1}| = 1/|A|$ (de $A \cdot B = I$, y $|I|=1$), $|k \cdot A_n| = k^n \cdot |A|$ siendo "n" el orden de la matriz A.

Tenemos $\det(2A) = 8 = 2^3 \cdot \det(A) = 8 \cdot \det(A)$, de donde **$\det(A) = 1$** .

b) Siendo B la matriz que se obtiene de A multiplicando por 3 la primera fila y por -1 la tercera, ¿cuánto vale $\det(B)$?

Sabemos que si una fila (columna de un determinante está multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando al determinante de la matriz.

Tenemos $A = (F_1, F_2, F_3)$, donde F_1, F_2 y F_3 indican la primera, segunda y tercera fila respectivamente de la matriz A. Me dicen que $B = (3 \cdot F_1, F_2, (-1) \cdot F_3) = (3 \cdot F_1, F_2, (-1) \cdot F_3)$.

Tenemos **$\det(B) = \det((3 \cdot F_1, F_2, (-1) \cdot F_3) = (3) \cdot (-1) \cdot \det(F_1, F_2, F_3) = -3 \cdot \det(A) = -3 \cdot 1 = -3$**

c) Determina los valores de x para los que la siguiente matriz A verifica que $\det(2A) = 8$, $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{pmatrix}$.

Hemos visto en el apartado (a) que $\det(A) = |A| = 1$.

$$\text{Tenemos } 1 = |A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 - 2 \cdot F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ -x+1 & 0 & 0 \\ 0 & -x+1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} = (-1) \cdot (-x+1) \cdot (0 - (-x+1)) = \\ \text{fila} \end{array}$$

$$= (x-1) \cdot (x-1) = x^2 - 2x + 1.$$

De $x^2 - 2x + 1 = 1$, tenemos $x^2 - 2x = 0 = x \cdot (x - 2)$, de donde **$x = 0$ y $x = 2$** .

Ejercicio 4 opción B, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

Considera los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,-2,2)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,-1,-2)$.

a) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

b) [1'5 puntos] Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C.

Solución

Considera los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,-2,2)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,-1,-2)$.

a)

Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

Sabemos que el volumen del tetraedro es $(1/6)$ del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores **AB**, **AC** y **AD**, que es el valor absoluto (lo notaremos $||$) del producto mixto (lo notaremos con corchetes $[]$) de los tres vectores **AB**, **AC** y **AD**. El producto mixto de tres vectores era su determinante.

$$\mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-1, -3, 1); \mathbf{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (-2, -1, 1) \text{ y } \mathbf{AD} = \mathbf{d} - \mathbf{a} = (1, -2, -3)$$

Tenemos, volumen = $(1/6) \cdot |[\mathbf{AB}, \mathbf{AC} \text{ y } \mathbf{AD}]| = (1/6) |\det(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD})| =$

$$= (1/6) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{matrix} = (1/6) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = (1/6) \cdot |(-1) \cdot (-10 - 5)| u^3 = (1/6) \cdot |(-1) \cdot (-15)| u^3 =$$

$$= (15/6) u^3 = 2'5 u^3.$$

b)

Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C.

Si la recta "r" es perpendicular al plano π_{ABC} , el vector normal del plano $\mathbf{n} = \mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$, se puede tomar como el vector director \mathbf{u} de la recta "r"

$$\mathbf{n} = \mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-3 + 1) - \vec{j}(-1 + 2) + \vec{k}(1 - 6) = (-2, -1, -5)$$

La recta "r" pasa por el punto $D(2,-1,-2)$ y tiene vector director $\mathbf{u} = \mathbf{u} = (-2, -1, -5)$.

$$\text{Sus ecuaciones paramétricas son: "r"} \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -2 - 5\lambda \end{cases}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$